# Théorie élémentaire de l'intégration

**Propositions pour un premier cours d'introduction à l'intégrale**

Jean-Pierre Demailly, Université Joseph Fourier Grenoble I

L'objectif de ce texte est de proposer une «trame» pour l'enseignement de l'intégration au lycée et au tout début de l'université. Ce n'est pas d'écrire un cours type destiné aux élèves et aux étudiants, mais plutôt de développer rigoureusement et de la façon la plus élémentaire possible, à l'intention des enseignants et des auteurs de manuels, les bases de la théorie de l'intégration telles qu'elles ont été posées et grandement éclaircies par Jaroslav Kurzweil et Ralph Henstock à la fin des années 1950.

Même si au début une partie des résultats doit être admise ou démontrée de manière heuristique (du fait des contraintes de temps ou des prérequis), nous pensons que la démarche mathématique utilisée dans l'enseignement doit respecter chaque fois que cela est possible les principes d'une progression par généralisations successives compatibles avec les exposés qui ont précédé («progression concentrique»). Il est donc très utile d'introduire dès le début des définitions qui sont susceptibles d'être rendues rigoureuses et formalisées, et d'adopter un ordre de présentation des concepts et une articulation logique tels que la théorie n'aura pas à être substantiellement changée le jour où viendra la formalisation complète. Dans un autre texte, nous développerons cette approche plus avant, pour montrer qu'elle permet facilement arriver jusqu'à la théorie de Lebesgue des fonctions intégrables ou mesurables en $n$ variables. Le choix de l'intégrale de Henstock-Kurzweil présente l'avantage de fournir des définitions assez simples – peut-être plus simples que celle de Riemann puisque les encadrements de fonctions ne sont plus nécessaires, que l'on n'a plus besoin de la continuité uniforme, que tous les théorèmes de base se démontrent en quelques lignes.

## 1. Sommes de Riemann

On se propose d'évaluer «l'aire algébrique» située sous le graphe d'une fonction suffisamment régulière $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

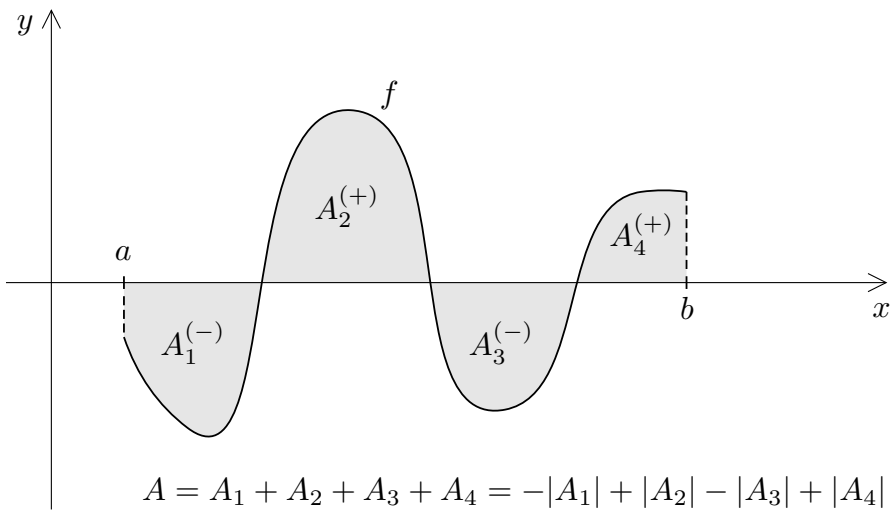


**Fig. 1**

c'est-à-dire l'aire $A$ du domaine défini comme l'ensemble des points $(x, y)$ tels que $x \in [a, b]$ et $y \in [0, f(x)]$, en comptant positivement les aires des parties situées au dessus de l'axe $Ox$ (donc telles que $f(x) > 0$) et négativement les aires des parties situées au dessous de l'axe $Ox$ (telles que $f(x) < 0$).[1]

L'idée est de découper l'intervalle $[a, b]$ au moyen d'une subdivision

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{N-1} < a_N = b$$

et de choisir des points intermédiaires (a priori quelconques) $x_j \in [a_j, a_{j+1}]$ dans chaque sous-intervalle de la subdivision. On notera $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leqslant j < N}$ une telle donnée de sous-intervalles consécutifs $[a_j, a_{j+1}]$ et de points $x_j \in [a_j, a_{j+1}]$, et on dira que $D$ est un *découpage pointé* ou une *subdivision pointée* de $[a, b]$.

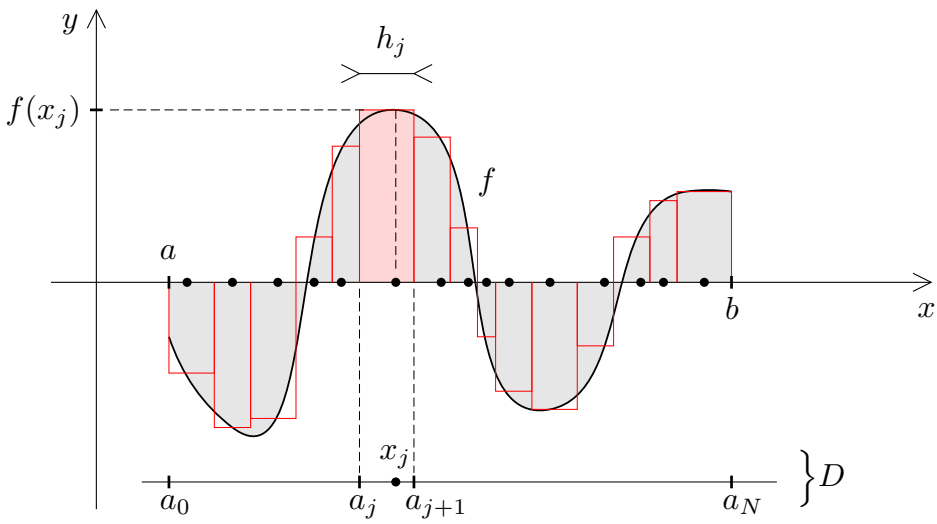


**Fig. 2**

On associe à $D$ la «somme de Riemann»

$$\boxed{S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) h_j} \tag{1.1}$$

où $h_j = a_{j+1} - a_j$ désigne le $j$-ième pas de la subdivision. L'expression $S_D(f)$ est précisément la somme des aires algébriques des rectangles apparaissant sur la Fig. 2. Il s'agit bien d'une aire algébrique puisque $f(x_j)h_j$ est compté positivement si $f(x_j) > 0$ et négativement si $f(x_j) < 0$.

Intuitivement l'aire $A$ cherchée est la limite de $S_D(f)$ quand les pas $h_j$ tendent vers 0. Un choix possible consiste par exemple à prendre une subdivision en sous-intervalles égaux $a_j = a + (b - a)(j/N)$, $\quad 0 \leqslant j \leqslant N \quad$ où $\quad h_j = h = (b - a)/N$, avec les points

[1] L'approche des intégrales par les aires nous paraît infiniment préférable à celle qui consiste à introduire a priori l'intégrale par le calcul des primitives, ne serait-ce que parce que cette façon de voir dépouille l'intégrale de son sens géométrique (et qu'en outre elle escamote l'unique façon de démontrer en général l'existence des primitives...)

milieux $x_j = (a_j + a_{j+1})/2$ comme points intermédiaires ; nous aurons cependant besoin de considérer des découpages plus généraux. Il est très facile de voir à partir de la définition (1.1) que les sommes de Riemann vérifient les propriétés fondamentales suivantes :

**(1.2) Linéarité.** *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions quelconques et $\lambda$, $\mu$ des constantes réelles, alors*

$$\boxed{S_D(\lambda f + \mu g) = \lambda S_D(f) + \mu S_D(g).}$$

**(1.3) Croissance.** *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions quelconques telles que $f \geqslant g$, alors $S_D(f) \geqslant S_D(g)$. En particulier, si $f \geqslant 0$, alors $S_D(f) \geqslant 0$.*

## 2. Définition de l'intégrale d'une fonction

L'idée consiste à se donner une marge d'erreur $\varepsilon > 0$ pour l'aire que l'on cherche à évaluer, et à essayer de répartir cette erreur en des erreurs $\varepsilon_j$ pour chacun des rectangles qui approchent l'aire située sous la courbe, de sorte que l'erreur totale $\sum \varepsilon_j$ soit $\leqslant \varepsilon$.

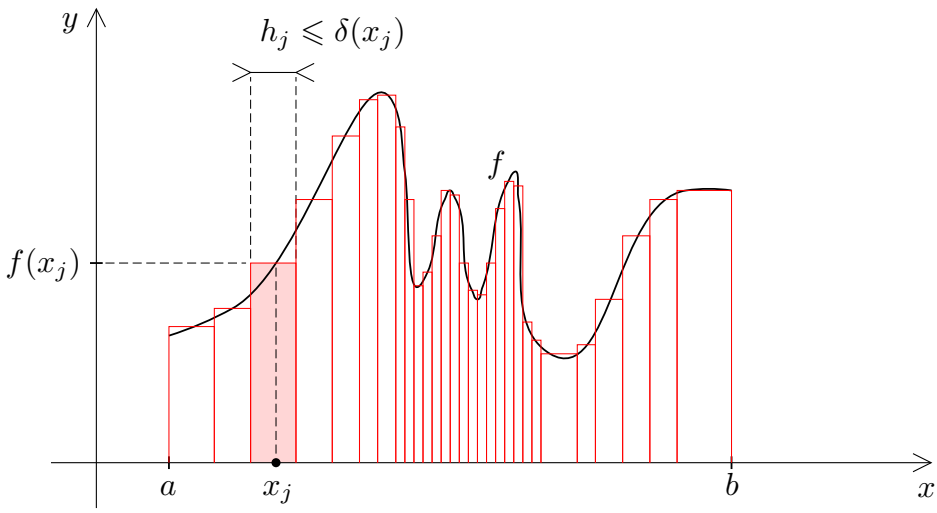


**Fig. 3**

Le schéma ci-dessus montre intuitivement que lorsque la fonction $f$ «oscille plus» à certains endroits qu'à d'autres, on a intérêt à resserrer davantage les pas $h_j$ à ces endroits-là. On exprimera cette condition en demandant que les pas $h_j$ vérifient une condition $h_j \leqslant \delta(x_j)$ où $\delta(x_j)$ est une quantité positive assez petite dépendant de l'endroit où l'on prend le rectangle de hauteur $f(x_j)$. On choisira donc des fonctions $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ positives qui serviront à majorer les pas $h_j$. Une telle fonction sera appelée *fonction jauge*, et une subdivision $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ telle que $h_j = a_{j+1} - a_j \leqslant \delta(x_j)$ pour tout $j$ sera dite $\delta$-fine.

**(2.1) Définition**. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On dit que $f$ est intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil, ou encore HK-intégrable) s'il existe un réel $A$ qui représente l'aire algébrique située sous le graphe de $f$, tel que pour toute marge*

*d'erreur $\varepsilon > 0$ donnée a priori, on peut trouver une jauge $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\delta(x) > 0$, en sorte que pour toute subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ de $[a,b]$ on ait*

$$h_j = a_{j+1} - a_j \leqslant \delta(x_j) \text{ pour tout } j \Rightarrow |S_D(f) - A| \leqslant \varepsilon.$$

*(une telle jauge $\delta$ sera dite $\varepsilon$-adaptée à $f$). Le nombre réel $A$ de la définition précédente est appelé intégrale de $f$ sur $[a,b]$ et noté $A = \int_a^b f(x)\,dx$. On écrit aussi*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{HK},\,D} S_D(f) = \lim_{\text{HK},\,D} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j)}$$

*et on dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est la limite (au sens de Henstock-Kurzweil) des sommes de Riemann, lorsque la subdivision $D$ devient de plus en plus fine.*[2]

La notation $dx$ intervient pour rappeler qu'à la limite on considère des rectangles «infiniment» fins de largeur $dx = a_{j+1} - a_j$, considérée comme accroissement infiniment petit de la variable $x$, et le symbole $\int_a^b$ se lit «somme de $a$ à $b$».

Une difficulté a cependant été éludée : c'est l'existence, pour toute fonction jauge $\delta$, de subdivisions $\delta$-fines, sans quoi la limite serait prise sur un ensemble vide de subdivisions, ce qui n'aurait pas de sens. Le résultat est évident pour une jauge constante : on peut prendre par exemple une subdivision de pas constant $h = (b-a)/N$ assez petit. En général, ce point peut être vérifié assez simplement par un procédé de «dichotomie» :

**(2.2) Lemme.** *Soit $\delta : [a,b] \to ]0, +\infty[$ une fonction positive quelconque. Alors il existe une subdivision pointée $D$ qui est $\delta$-fine.*

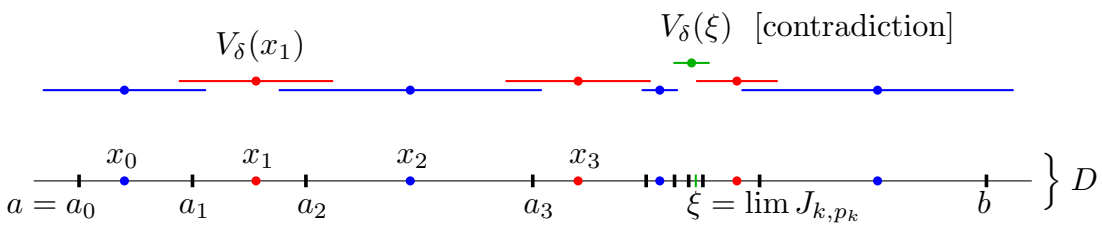


**Fig. 4**

*Démonstration.*[3] On note $V_\delta(x) = [x - \frac{1}{2}\delta(x), x + \frac{1}{2}\delta(x)]$ le segment de longueur $\delta(x)$ centré en $x$ et $\ell = b - a$ la longueur totale de l'intervalle $[a,b]$. On va considérer uniquement des subdivisions «spéciales» de $[a,b]$, obtenues en divisant $[a,b]$ successivement en

(2) On notera que dans la définition plus classique (et plus ancienne) de l'intégrabilité «au sens de Riemann», on utilise une constante $\delta > 0$ à la place de la fonction jauge $\delta(x) > 0$. Intuitivement ce n'est pas une très bonne définition du point de vue de la précision du calcul numérique. Bien qu'en apparence la définition de Henstock-Kurzweil diffère très peu de celle de l'intégrale de Riemann, il se trouve qu'elle jouit de propriétés beaucoup meilleures, tout en procurant des démonstrations plus simples et en éliminant beaucoup d'hypothèses superflues, par exemple celle que la fonction $f$ soit nécessairement bornée. L'intégrale de Henstock-Kurzweil est parfois appelée aussi *intégrale de Riemann généralisée*, ou encore *intégrale de jauge*. Pour éviter les confusions, nous suggérons de *ne pas introduire simultanément les deux notions* en classe terminale ... La définition de Henstock-Kurzweil est «la bonne» et elle suffira amplement aux premiers besoins – bien qu'en fait elle soit d'une certaine manière encore plus générale que celle de Lebesgue.

(3) Il s'agit en fait d'une version concrète élémentaire du théorème dit de Borel-Lebesgue. En classe terminale, on pourra peut-être se contenter d'admettre le lemme 2.2 comme intuitivement évident, ou d'expliquer le raisonnement sur une figure ...

2, 4, 8, $\ldots$, $2^k$, $\ldots$ parties égales, et donc formées de sous-intervalles dont la longueur est de la forme $\ell/2^k$ (ces longueurs n'étant pas nécessairement toutes les mêmes). De façon précise, on considère les intervalles

$$J_{k,p} = [a + p\ell/2^k, a + (p+1)\ell/2^k] \quad \text{de longueur } \ell/2^k, \quad 0 \leqslant p < 2^k,$$

tels que $J_{k,p} \subset V_\delta(x)$ pour au moins un $x \in J_{k,p}$ (points marqués en bleu et en rouge). Si $[a,b]$ n'admettait pas de subdivision spéciale $\delta$-fine, alors l'un au moins des deux intervalles $J_{1,0} = [a, \frac{a+b}{2}]$, $J_{1,1} = [\frac{a+b}{2}, b]$ n'en aurait pas non plus. Par récurrence sur $k$, on obtiendrait une suite de segments emboîtés $J_{k,p_k} \subset J_{k-1,p_{k-1}} \subset \ldots \subset J_{1,p_1}$ dont aucun n'aurait de subdivision spéciale $\delta$-fine. D'après le théorème des suites adjacentes, ces intervalles convergeraient vers un certain réel $\xi \in [a,b]$ tel que $\xi \in J_{k,p_k}$ pour tout $k$. Par suite $V_\delta(\xi)$ contiendrait $J_{k,p_k}$ pour $k$ assez grand, ce qui est absurde puisqu'alors $J_{k,p_k}$ aurait une subdivision $\delta$-fine formée par l'intervalle pointé $(J_{k,p_k}, \xi)$ à lui tout seul. Par conséquent $[a,b]$ possède une subdivision spéciale $\delta$-fine. $\square$

**(2.3) Exemple.** On appelle fonction en escalier sur $[a,b]$ une fonction $f$ telle qu'il existe des points $(u_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de $[a,b]$ et des constantes réelles $c_i$ telles que

$$a = u_0 < u_1 < \ldots < u_p = b \quad \text{et} \quad f(x) = c_i \ \text{ sur } ]u_i, u_{i+1}[\,,$$

les valeurs $f(u_i) \in \mathbb{R}$ étant elles-mêmes quelconques, éventuellement différentes des valeurs $c_i$. Nous affirmons :

*Toute fonction en escalier $f$ est intégrable, et on a*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{p-1} c_i(u_{i+1} - u_i).}$$

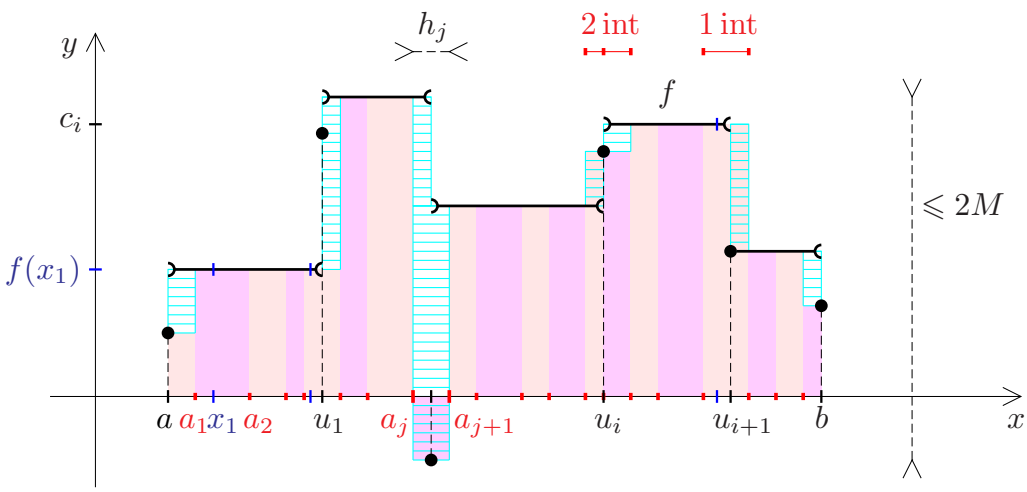


**Fig. 5**

*Démonstration.* La fonction $f$ est bornée, la borne supérieure de $|f|$ est donnée par

$$M = \sup_{[a,b]} |f| = \max_{[a,b]} |f| = \max\{|c_i|,\ |f(u_j)|\}.$$

Soit $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ une subdivision $\delta$-fine pour une certaine constante $\delta > 0$ (les points $a_j$ n'ont a priori aucun rapport avec les points de subdvision $u_i$ de la fonction en escalier). La somme de Riemann $S_D(f) = \sum f(x_j)h_j$ est représentée par par la somme des aires des rectangles de couleur rosée de la Fig. 5 (avec les points $a_j$ en rouge et les points de marquage $x_j$ en bleu – tous ceux-ci n'étant pas représentés). La différence entre les aires $S_D(f)$ et $\sum c_i(u_{i+1} - u_i)$ (partie en noir du graphe) est représentée par les zones hachurées en bleu clair. Nous avons au plus $2p$ intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ qui contiennent l'un des points intermédiaires $u_i$, à savoir un à chaque extrêmité et un ou deux pour chacun des points $u_i$, $i = 1, \ldots, p-1$. Pour chacun de ces intervalles, le terme $f(x_j)h_j$ mis en jeu diffère de l'aire des deux rectangles délimités par le graphe de $f$ par au plus $2Mh_j \leqslant 2M\delta$ (cf. Fig. 5), puisque $|f(x) - f(x_j)| \leqslant 2M$ et $h_j \leqslant \delta$. Au total on a donc

$$\Big| S_D(f) - \sum_{0 \leqslant i \leqslant p-1} c_i(u_{i+1} - u_i) \Big| \leqslant 2p \times 2M\delta = 4pM\delta.$$

Il suffit alors de choisir $\delta = \varepsilon/(4pM)$ pour conclure. □

## 3. Propriétés élémentaires de l'intégrale

Commençons tout d'abord par des conséquences directes des propriétés (1.2) et (1.3) satisfaites par les sommes de Riemann $S_D(f)$.

**(3.1) Linéarité.** *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions intégrables sur $[a, b]$ et $\lambda$, $\mu$ des constantes réelles, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\boxed{\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.}$$

*Démonstration.* En termes de limites de sommes de Riemann sur des subdivisions pointées $D$ de $[a, b]$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\, dx &= \lim_{\text{HK},\, D} S_D(\lambda f + \mu g) = \lim_{\text{HK},\, D} \lambda S_D(f) + \mu S_D(g)\\ &= \lambda \lim_{\text{HK},\, D} S_D(f) + \mu \lim_{\text{HK},\, D} S_D(g)\\ &= \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.\end{aligned}$$

Pour analyser plus en détail cet argument, reprenons le calcul en termes de fonctions jauges, une marge d'erreur $\varepsilon > 0$ étant fixée a priori. Posons

$$A = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad B = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Il existe par hypothèse des fonctions jauges $\delta_1$, $\delta_2$ telles que si $D$ est $\delta_1$-fine alors $|S_D(f) - A| \leqslant \varepsilon$ et si $D$ est $\delta_2$-fine alors $|S_D(g) - B| \leqslant \varepsilon$. Prenons une subdivision $D$ $\delta$-fine avec $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Comme $S_D(\lambda f + \mu g) = \lambda S_D(f) + \mu S_D(g)$ on en déduit

$$\big|S_D(\lambda f + \mu g) - (\lambda A + \mu B)\big| \leqslant (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.$$

Ceci montre que $\lambda f + \mu g$ est intégrable et que son intégrale est $\lambda A + \mu B$. □

**(3.2) Croissance.** *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions intégrables sur $[a, b]$*

$$\boxed{f \geqslant g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.}$$

Cela résulte de la propriété analogue des sommes de Riemann $S_D(f) \geqslant S_D(g)$, par passage à la limite.

**(3.3) Relation de Chasles.** *Soient $a < b < c$ des réels et $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f$ est intégrable sur $[a, b]$ et intégrable sur $[b, c]$, alors $f$ est intégrable sur $[a, c]$ et on a l'égalité*

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.}$$

*Ceci vaut aussi bien pour l'intégrabilité au sens de Riemann que pour l'intégrabilité au sens de Henstock-Kurzweil.*

*Démonstration.* Posons

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad A_2 = \int_b^c f(x)\,dx, \qquad A = A_1 + A_2.$$

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ sur $[a, b]$ et $\delta_2 > 0$ sur $[b, c]$ telles que pour toutes subdivisions pointées $\delta_1$-fine $D_1$ de $[a, b]$ et $\delta_2$-fine $D_2$ de $[b, c]$ on ait $|S_{D_1}(f) - A_1| \leqslant \varepsilon$ et $|S_{D_2}(f) - A_2| \leqslant \varepsilon$. Le but est de trouver une majoration de $|S_D(f) - A|$ lorsque $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)$ est une subdivision pointée quelconque de $[a, c]$. Si $D$ contient $a_j = b$ comme l'un des points intermédiaires, $D$ induit des subdivisions $D_1$ de $[a, b]$ et $D_2$ de $[b, c]$ telles que $S_D(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f)$. On peut encore se ramener à cette situation dans le cas où l'un des intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ contient le point $b$ en son intérieur tout en étant pointé par $x_j = b$. En effet on peut alors découper $([a_j, a_{j+1}], x_j{=}b)$ en les deux intervalles pointés $([a_j, b], b)$ et $([b, a_{j+1}], b)$, ce qui ne change pas la somme de Riemann $S_D(f)$. On construit une jauge $\delta : [a, c] \to ]0, +\infty[$ en posant

$$\delta(x) = \begin{cases} \min(\delta_1(x), b - x) & \text{si } x \in [a, b[, \\ \min(\delta_2(x), x - b) & \text{si } x \in ]b, c], \\ \min(\delta_1(b), \delta_2(b)) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Si $D$ est une subdivision pointée $\delta$-fine de $[a, c]$ on a alors

$$\begin{aligned} x_j \in [a, b[ &\Rightarrow a_{j+1} \leqslant x_j + \delta(x_j) \leqslant x_j + (b - x_j) = b \Rightarrow [a_j, a_{j+1}] \subset [a, b], \\ x_j \in ]b, c] &\Rightarrow \quad a_j \geqslant x_j - \delta(x_j) \geqslant x_j - (x_j - b) = b \Rightarrow [a_j, a_{j+1}] \subset [b, c]. \end{aligned}$$

Ceci montre que le seul intervalle $[a_j, a_{j+1}]$ pouvant contenir $b$ en son intérieur apparaît lorsque $x_j = b$, ce qui induit un découpage $S_D(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f)$ comme ci-dessus. Puisque $\delta \leqslant \delta_i$, on en déduit que $D_i$ est $\delta_i$-fine pour $i = 1, 2$, donc $|S_D(f) - A| \leqslant 2\varepsilon$. On trouve bien à la limite

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\mathrm{HK},\,D} S_D(f) = A = A_1 + A_2 = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx. \qquad \square$$

Pour des réels $a$, $b$ qui ne vérifient pas nécessairement $a < b$, on pose

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \text{si } a = b, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{si } a > b. \tag{3.4}$$

On peut vérifier que la relation de Chasles reste valable dans tous les cas, quel que soit l'ordre des réels $a, b, c$, à condition bien sûr que $f$ soit intégrable sur chacun des intervalles mis en jeu.

## 4. Le théorème fondamental de l'Analyse

Comme on va le voir, la définition de l'intégrale de Henstock-Kurzweil permet de voir directement et de manière très simple que l'intégration est l'opération inverse de la dérivation.

**(4.1) Théorème.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f'$ est intégrable et*

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).}$$

*Démonstration.*[4] Commençons par une preuve heuristique (c'est-à-dire simplifiée, mais non rigoureuse). Soit $D = \{[a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ une subdivision pointée assez fine. On a par définition

$$\int_a^b f'(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{N-1} f'(x_j)(a_{j+1} - a_j).$$

Mais $f'(x_j)$ peut être vu comme une approximation de la pente de $f$ sur l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$ et on a donc $f'(x_j)(a_{j+1} - a_j) \simeq f(a_{j+1}) - f(a_j)$, d'où

$$\int_a^b f'(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{N-1} (f(a_{j+1}) - f(a_j)) = f(b) - f(a).$$

[4] Le théorème 4.1 est un résultat particulièrement impressionnant de la théorie de Henstock-Kurzweil, que même la théorie de Lebesgue ne permet pas d'obtenir. Posons en effet $f(x) = x^2 \sin(x^{-n})$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Il est facile de voir que $f'(0) = \lim_{x\to 0} f(x)/x = 0$ et donc que $f$ est partout dérivable sur $\mathbb{R}$. Cependant $f'(x) = 2x \sin(x^{-n}) - nx^{1-n} \cos(x^{-n})$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$ pour $n \geqslant 2$, puisque les intégrales $\int_0^1 x^{1-n} |\cos(x^{-n})|\,dx$ et $\int_0^1 |f'(x)|\,dx$ divergent. Ce « défaut » de la théorie de Lebesgue avait amené A. Denjoy à proposer en 1912 une théorie de « l'intégrale totale » qui lui permit de rétablir la validité du Théorème 4.1 (cf. aussi les travaux de O. Perron [15]). Cette théorie se révélera a posteriori essentiellement équivalente à la théorie de Henstock-Kurzweil, mais avec un formalisme et des justifications plus compliquées.

Il n'est pas difficile de rendre cet argument rigoureux. L'hypothèse de l'existence de $f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ signifie par définition que pour tout pout $x \in [a,b]$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta(x) > 0$ tel que

$$y \in [a,b], \quad 0 < |y-x| \leqslant \delta(x) \Rightarrow \Big|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x)\Big| \leqslant \varepsilon, \qquad \text{et donc}$$

$$y \in [a,b], \quad y \in [x-\delta(x), x+\delta(x)] \Rightarrow \big|f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)\big| \leqslant \varepsilon|y-x|$$

(puisque l'inégalité est vraie aussi de manière évidente pour $y = x$). Prenons une subdivision pointée $D = \{[a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ $\delta$-fine, c'est-à dire telle que $h_j = a_{j+1} - a_j \leqslant \delta(x_j)$. En appliquant l'égalité ci-dessus à $x = x_j$ et $y = a_j$ ou $y = a_{j+1}$, il vient

$$\begin{aligned}\big|f(a_j)-f(x_j)-(a_j-x_j)f'(x_j)\big| &\leqslant \varepsilon|a_j-x_j| = \varepsilon(x_j-a_j),\\ \big|f(a_{j+1})-f(x_j)-(a_{j+1}-x_j)f'(x_j)\big| &\leqslant \varepsilon|a_{j+1}-x_j| = \varepsilon(a_{j+1}-x_j).\end{aligned}$$

En faisant la différence, l'inégalité $|v-u| \leqslant |u|+|v|$ donne

$$\big|f(a_{j+1})-f(a_j)-(a_{j+1}-a_j)f'(x_j)\big| \leqslant \varepsilon(a_{j+1}-a_j).$$

La sommation de ces inégalités pour $j = 0, 1, \ldots, N-1$ implique en définitive

$$\big|f(b)-f(a)-S_D(f')\big| \leqslant \varepsilon(b-a),$$

par conséquent

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{\text{HK},\,D} S_D(f') = f(b)-f(a). \qquad \square$$

Notons qu'on retrouve ainsi le résultat important suivant qui, alternativement (et de manière plus classique) est démontré au moyen du théorème des accroissements finis.

**(4.2) Corollaire.** *Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, telle que $f' = 0$ (resp. $f' \geqslant 0$, $f' \leqslant 0$). Alors $f$ est constante (resp. croissante, décroissante).*

*Démonstration.* En effet, pour tous points $a < b$ dans $I$, on voit que $f(b) - f(a)$ est égal à 0 (resp. positif ou nul, négatif ou nul). $\square$

Nous donnons maintenant la liste des formules usuelles à partir desquelles on peut évaluer explicitement des intégrales à l'aide d'un calcul de primitives, ce qui permet déjà de proposer un grand nombre d'exercices et de techniques classiques.[5]

**(4.3) Calcul des intégrales au moyen de primitives.** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admet une primitive $F$ (c'est-à-dire si $F$ est dérivable et $F' = f$), alors $f$ est intégrable et

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad \text{encore noté} \quad \big[F(x)\big]_a^b.}$$

(5) On notera que pour en arriver là, on a eu besoin de nettement moins de théorie que dans l'approche classique de l'intégrale de Riemann. En effet, dans cette approche, il faut au préalable connaître l'intégrabilité des fonctions continues, et avoir démontré que la dérivée de l'intégrale indéfinie d'une fonction continue $f(x)$ est égale à cette fonction, pour en conclure que l'intégrale indéfinie est une primitive de $f$. Par ailleurs, toutes les hypothèses superflues (fonctions $C^1$ dans les intégrations par parties) disparaissent ...

**(4.4) Formule d'intégration par parties.** Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Le produit $uv$ est alors dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$. Par conséquent $uv'$ est intégrable si et seulement si $u'v$ l'est, et dans ce cas

$$\big[u(x)v(x)\big]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x).$$

On a donc la formule

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx,}$$

qui peut encore se récrire de manière plus abrégée

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b v\,du.}$$

**(4.5) Formule de changement de variable.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive $F$. On a alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Il est souvent commode de changer de variable, en posant $x = \varphi(t)$ pour une certaine fonction $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ dérivable telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ (on ne suppose pas nécessairement $a \leqslant b$ ni $\alpha \leqslant \beta$). Il vient alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \big[F \circ \varphi(t)\big]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

On a donc la formule fondamentale

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi\,d\varphi.}$$

En pratique, on effectue les substitutions

$$\boxed{x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt, \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta),}$$

en prenant soin de changer les bornes comme indiqué.

## 5. Encadrements par des fonctions en escalier

Nous nous proposons de démontrer ici que quelques classes usuelles de fonctions (notamment les fonctions continues ou monotones par morceaux) sont intégrables. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. L'idée est de considérer des encadrements

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \tag{5.1}$$

de $f$ par des fonctions en escalier $\varphi$, $\psi$, comme figuré sur le schéma ci-dessous.

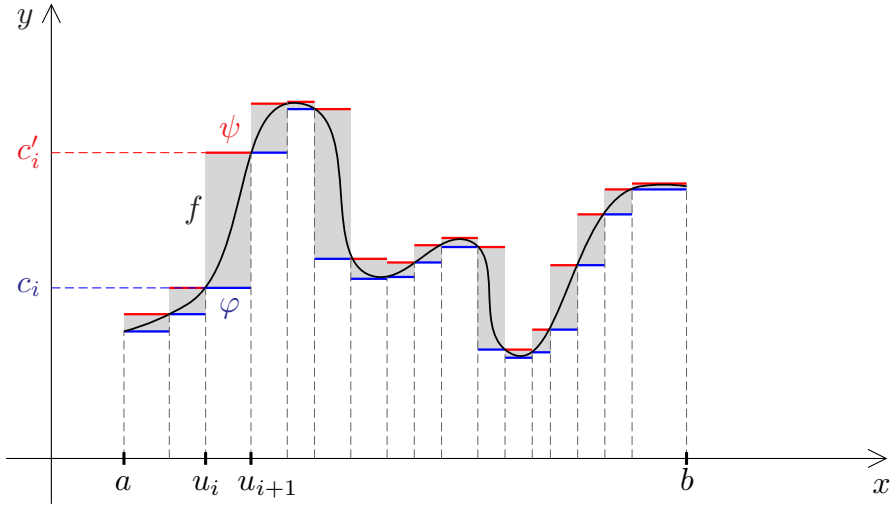


**Fig. 6**

On peut supposer ici que les fonctions en escalier $\varphi$ et $\psi$ sont exprimées au moyen de la même subdivision $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_p = b$, sinon il est toujours possible de redécouper les subdivisions qui les définissent pour arriver à une subdivision commune [comme les valeurs $\varphi(u_i)$, $\psi(u_i)$ ne jouent pas de rôle dans les intégrales, on choisira par exemple $\varphi(u_i) = \psi(u_i) = f(u_i)$ ]. Dans cette situation, l'erreur due à l'encadrement de l'aire est précisément

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{0\leqslant i\leqslant p-1} (c_i' - c_i)(u_{i+1} - u_i) \tag{5.2}$$

(aire des rectangles grisés). On obtient ainsi le

**(5.3) Critère d'intégrabilité**. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un encadrement $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ de $f$ par des fonctions en escalier telles que*

$$\boxed{\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{0\leqslant i\leqslant p-1} (c_i' - c_i)(u_{i+1} - u_i) \leqslant \varepsilon.}$$

*Alors $f$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sup\Big\{\int_a^b \varphi(x)\,dx\,;\ \varphi \leqslant f\Big\} = \inf\Big\{\int_a^b \psi(x)\,dx\,;\ \psi \geqslant f\Big\}.}$$

*Démonstration.* Posons

$$E_1 = \Big\{\int_a^b \varphi(x)\,dx\,;\ \varphi \leqslant f\Big\}, \quad E_2 = \Big\{\int_a^b \psi(x)\,dx\,;\ \psi \geqslant f\Big\},$$

et $S = \sup E_1$, $I = \inf E_2$, Il est clair que pour tout $A_1 = \int_a^b \varphi(x)\,dx \in E_1$ et tout $A_2 = \int_a^b \psi(x)\,dx \in E_2$ on a $A_1 \leqslant A_2$. L'hypothèse du critère signifie que pour un choix adéquat de $\varphi$, $\psi$ on a $A_2 - A_1 \leqslant \varepsilon$. Ceci entraîne bien $S = \sup E_1 = I = \inf E_2$. Comme toute fonction en escalier est intégrable avec des jauges constantes (cf. exemple 2.3), il existe $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tels que

$$\begin{aligned} &\forall D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}, \qquad h_j \leqslant \delta_1 \text{ pour tout } j \Rightarrow |S_D(\varphi) - A_1| \leqslant \varepsilon, \\ &\forall D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}, \qquad h_j \leqslant \delta_2 \text{ pour tout } j \Rightarrow |S_D(\psi) - A_2| \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Or nous avons $A_1 \leqslant S = I \leqslant A_2$ et $A_2 - A_1 \leqslant \varepsilon$. Prenons une subdivision pointée $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)$ vérifiant $h_j \leqslant \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Nous obtenons dans ces conditions $S_D(\varphi) \leqslant S_D(f) \leqslant S_D(\psi)$, donc

$$S_D(f) \leqslant S_D(\psi) \leqslant A_2 + \varepsilon \leqslant I + 2\varepsilon, \qquad S_D(f) \geqslant S_D(\varphi) \geqslant A_1 - \varepsilon \geqslant S - 2\varepsilon.$$

Par suite en posant $A = S = I$ il vient $|S_D(f) - A| \leqslant 2\varepsilon$. Le critère d'intégrabilité est démontré. □

**(5.4) Remarque.** La démonstration du critère 5.3 montre en fait que l'on peut toujours dans ce cas choisir la jauge $\delta$ constante : on dit alors que $f$ est *intégrable au sens de Riemann* (cf. note de bas de page (2)).

Une application directe de 5.3 est la preuve de l'intégrabilité des fonctions monotones.

**(5.5) Théorème.** *Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotone est intégrable sur $[a, b]$.*

*Démonstration.* Supposons par exemple $f$ croissante et soit $a = u_1 < \ldots < u_p = b$ une subdivision $\delta$-fine de $[a, b]$, où $\delta > 0$ est une constante. De manière évidente, on définit un encadrement $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ de $f$ par des fonctions en escalier en posant

$$\varphi(x) = f(u_j) \ \text{ sur } ]u_j, u_{j+1}[, \qquad \psi(x) = f(u_{j+1}) \ \text{ sur } ]u_j, u_{j+1}[$$

(et $\varphi(u_j) = \psi(u_j) = f(u_j)$ comme déjà convenu). Ceci donne

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx &= \sum_{0 \leqslant j \leqslant N-1} \big(f(u_{j+1}) - f(u_j)\big)(u_{j+1} - u_j) \\ &\leqslant \delta \sum_{0 \leqslant j \leqslant N-1} \big(f(u_{j+1}) - f(u_j)\big) = \delta\big(f(b) - f(a)\big). \end{aligned}$$

On voit ainsi que le critère 5.3 est vérifié en prenant $\delta$ assez petit. □

**(5.6) Théorème** *Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue est intégrable sur $[a, b]$.*

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de $f$ en tout point $x \in [a, b]$ implique l'existence d'un réel $\delta(x) > 0$ tel que

$$x' \in [a, b], \ \ x' \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow |f(x') - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)_{0\leqslant j<N}$ une subdivision pointée $\delta$-fine. En prenant $x = x_j$ et en faisant parcourir à $x'$ l'intervalle $[a_j, a_{j+1}] \subset [x_j - \delta(x_j), x_j + \delta(x_j)]$, on déduit de la majoration $|f(x') - f(x_j)| \leqslant \varepsilon$ que les bornes inf et sup

$$m_j = \inf_{x'\in[a_j,a_{j+1}]} f(x'), \quad M_j = \sup_{x'\in[a_j,a_{j+1}]} f(x')$$

sont comprises entre $f(x_j) - \varepsilon$ et $f(x_j) + \varepsilon]$, par conséquent $M_j - m_j \leqslant 2\varepsilon$. On obtient ainsi un encadrement $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ de $f$ par des fonctions en escalier $\varphi$, $\psi$ telles que

$$\varphi(x) = m_j, \quad \psi(x) = M_j \quad \text{si } x \in ]a_j, a_{j+1}[, \qquad \varphi(a_j) = \psi(a_j) = f(a_j),$$

et de plus

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx &= \sum_{0\leqslant j\leqslant N-1} (M_j - m_j)(a_{j+1} - a_j)\\ &\leqslant 2\varepsilon \sum_{0\leqslant j\leqslant N-1} a_{j+1} - a_j = 2\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Ceci montre que le critère 5.3 est satisfait, donc $f$ est intégrable.[6] □

**(5.7) Théorème.** *Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admet une primitive $F$, donnée par*

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a, b].}$$

*Les autres primitives sont les fonctions de la forme $F_1(x) = F(x) + C$ où $C$ est une constante.*

*Démonstration.* Nous savons que l'intégrale donnant $F(x)$ existe par le Théorème 5.6. La relation de Chasles donne

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt \Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'hypothèse de continuité dit que $f(x) - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant f(x) + \varepsilon$ pour $|t - x| \leqslant \delta(x)$, on a donc

$$f(x) - \varepsilon = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(x) - \varepsilon)dt \leqslant \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(x) + \varepsilon)dt = f(x) + \varepsilon$$

pour $|h| \leqslant \delta(x)$, ce qui signifie que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Si on a une autre primitive $F_1$, il vient $(F_1 - F)' = f' - f' = 0$, donc $F_1 - F = C$ constante. □

(6) On remarquera que dans cette preuve l'utilisation de la continuité uniforme de la fonction $f$ n'a pas été nécessaire, ce qui est une simplification appréciable susceptible de rendre la preuve abordable dès la classe terminale [avec des vitamines !]. Mais en réalité, notre preuve montrerait aussi au prix d'un court raisonnement que $f$ est bien uniformément continue, l'argument essentiel étant caché derrière l'existence de subdivision $\delta$-fines, elle-même équivalente sur $\mathbb{R}$ au théorème de Borel-Lebesgue.

**(5.8) Proposition.**

(a) *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue* $\geqslant 0$, *on a* $\int_a^b f(x) = 0$ *si et seulement si* $f = 0$.

(b) *Par suite si* $f$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sont continues et* $f \leqslant g$, *on a* $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$ *dès que* $f$ *et* $g$ *se sont pas égales.*

*Démonstration.* (a) S'il existe un point $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors posant $\varepsilon = f(x_0)/2$. La continuité de $f$ en $x_0$ implique qu'il existe un intervalle $[x_0, x_0 + \eta]$ (ou $[x_0 - \eta, x_0]$, si $x_0 = b$) sur lequel $f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. On voit donc qu'il existe un sous-intervalle $[c, d]$ de de $[a, b]$ de longueur $d - c = \eta > 0$ sur lequel $f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon \geqslant \varepsilon$. Par suite $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_c^d f(x)\,dx \geqslant (d - c)\varepsilon > 0$.

(b) Si $f \leqslant g$ et $f \neq g$, alors $h = g - f \geqslant 0$ n'est pas nulle, donc $\int_a^b h(x)\,dx > 0$ d'après (a). □

**(5.9) Formule de la moyenne.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors il existe un point* $c \in ]a, b[$ *tel que la « valeur moyenne de* $f$ *sur* $[a, b]$ *» soit égale à* $f(c)$ :

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).}$$

*Démonstration.* Soit $m = \min_{[a,b]} f$, $M = \max_{[a,b]} f$. Supposons d'abord $f$ non constante. D'après la proposition 5.8 (b) appliquée aux inégalités $m \leqslant f \leqslant M$, nous avons

$$m(b - a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b - a), \quad \text{soit} \quad m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < M.$$

La formule de la moyenne est donc une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, puisque $f(]a, b[)$ est un intervalle qui contient l'intervalle $]m, M[$. Si $f$ est égale à une constante $C$, le résultat est évident, les deux membres de la formule étant égaux à $C$ quel que le soit le choix de $c \in ]a, b[$. □

**(5.10) Théorème et définition.** *On dit qu'une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est continue* (*resp. monotone*) *par morceaux s'il existe une subdivision*

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{N-1} < \alpha_N = b$$

*telle que* $f$ *soit continue* (*resp. monotone*) *sur chaque intervalle* $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ *et possède des limites à droite et à gauche finies en chaque point* $\alpha_j$ *tel que* $j < N$ (*resp.* $j > 0$). *Toute fonction continue ou monotone par morceaux est intégrable.*

*Démonstration.* En effet, la restriction $f_{|[\alpha_j, \alpha_{j+1}]}$ diffère d'une fonction continue (resp. monotone) par une fonction en escalier nulle sur $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ (et prenant des valeurs adéquates en $\alpha_j$ et $\alpha_{j+1}$). Par conséquent $f_{|[\alpha_j, \alpha_{j+1}]}$ est intégrable, et l'intégrabilité de $f$ sur $[a, b]$ résulte de la relation de Chasles. □

## 6. Applications et généralisations

**(6.1) Calcul d'aires.** Par définition même, l'intégrale d'une fonction $f$ calcule l'aire algébrique située sous son graphe. Pour un domaine plan quelconque, la frontière est en général délimitée par les graphes de plusieurs fonctions (deux au moins, davantage si le domaine comporte des «trous» ou des «renfoncements»).

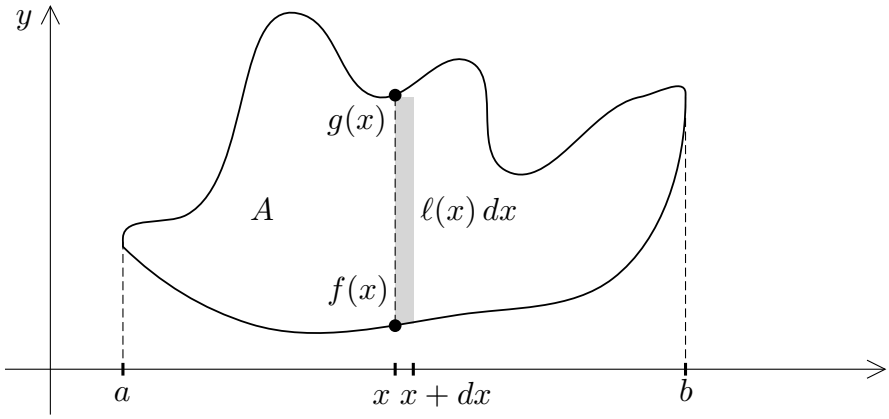


**Fig. 7**

L'aire est ici donnée par l'intégrale de la longueur $\ell(x) = g(x) - f(x)$ des sections «verticales» du domaine plan :

$$\boxed{A = \int_a^b \ell(x)\,dx = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx.}$$

**(6.2) Calcul de volumes.** La procédure est essentiellement la même : on effectue des sections planes (disons par exemple en coupant par un plan horizontal $z = \text{Cte}$), et on suppose connue l'aire $S(z)$ d'une telle section plane.

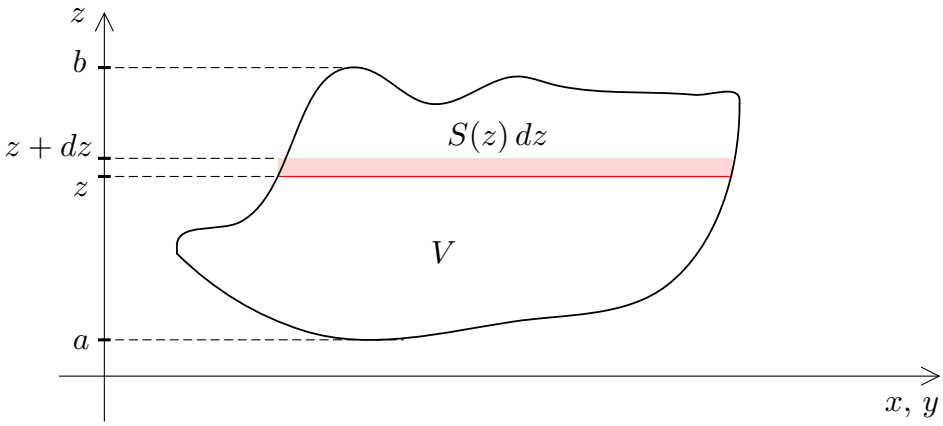


**Fig. 8**

Dans ce cas, le volume est donné par

$$\boxed{V = \int_a^b S(z)\,dz.}$$

**(6.3) Application aux calculs de limites de certaines sommations.** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction Riemann-intégrable, par exemple continue ou monotone par morceaux, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\Big(a + j\frac{b-a}{n}\Big) = \int_a^b f(x)\,dx,}$$

puisque le membre de gauche est la somme de Riemann relative à la subdivision de $[a,b]$ en $n$ sous-intervalles égaux. Par exemple, en prenant $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $[a,b] = [0,1]$, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\Big(\frac{j}{n}\Big) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log 2.$$

Nous démontrons maintenant une généralisation du théorème fondamental 4.1. Nous commençons par une remarque utile.

**(6.4) Remarque.** Si $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction qui est nulle partout sauf sur un ensemble fini de points $E = \{u_i\} \subset [a,b]$, alors $h$ est Riemann-intégrable d'intégrale nulle. C'est en effet un cas très particulier de fonction en escalier, et on peut appliquer la formule du 2.3 avec $c_i = 0$. Il en résulte que si deux fonctions $f$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffèrent en un nombre fini de points, alors l'intégrabilité de l'une équivaut à l'intégrabilité de l'autre et on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ (il suffit d'appliquer la remarque initiale à $h = g - f$). On peut même envisager d'intégrer des fonctions $f$ qui sont seulement définies sur le complémentaire sur $[a,b] \smallsetminus E$ d'un ensemble fini : on se ramène au cas d'une fonction partout définie en étendant $f$ arbitrairement sur $[a,b]$, par exemple en posant $\tilde{f}(x) = 0$ sur $E$.

**(6.5) Théorème.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un ensemble fini $E = \{u_i\,;\ 1 \leqslant i \leqslant p\}$ tel que $f$ soit dérivable sur $[a,b] \smallsetminus E$. Alors $f'$ (étendue arbitrairement aux points $u_i$) est intégrable sur $[a,b]$ et on a*

$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).}$$

*Démonstration.* Supposons pour simplifier $f'$ définie par $f'(u_i) = 0$ aux points où $f$ n'est pas dérivable. On reprend la démonstration du théorème 4.1. La dérivabilité de $f$ sur $[a,b] \smallsetminus E$ implique l'existence d'une fonction $\delta : [a,b] \smallsetminus E \to ]0,+\infty[$ telle que

$$y \in [a,b], \quad y \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow \big|f(y) - f(x) - (y-x)f'(x)\big| \leqslant \varepsilon|y-x|$$

pour tout $x \in [a,b] \smallsetminus E$, ce qui donne

$$\big|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1} - a_j)f'(x_j)\big| \leqslant \varepsilon|a_{j+1} - a_j|$$

pour toute subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ $\delta$-fine, lorsque $x_j \in [a,b] \smallsetminus E$. D'autre part, si $x_j = u_i \in E$, la continuité de $f$ au point $u_i$ entraîne l'existence de $\delta_i > 0$ tel que tout point $x \in [u_i - \delta_i, u_i + \delta_i]$ satisfasse $|f(x) - f(u_i)| \leqslant \varepsilon\, 2^{-i}$. On pose alors $\delta(u_i) = \delta_i$. Dans ce cas il vient $|f(a_{j+1}) - f(a_j)| \leqslant 2\varepsilon\, 2^{-i}$ si $x_j = u_i$, ce qui donne

$$\big|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1} - a_j) f'(x_j)\big| \leqslant 2\varepsilon\, 2^{-i}.$$

En sommant toutes ces inégalités, il vient

$$\big|f(b) - f(a) - S_D(f')\big| \leqslant \varepsilon(b-a) + 2\varepsilon,$$

(car $\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} 2\varepsilon\, 2^{-i} \leqslant 2\varepsilon$), ce qui démontre le théorème. □

**(6.6) Corollaire.** *Si $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ admet une primitive $F$ sur $]a,b[$, et si cette primitive $F$ admet une limite à droite $F(a+0)$ en $a$ et une limite à gauche $F(b-0)$ en $b$, alors $f$ est intégrable sur $[a,b]$ (si $f$ n'est pas a priori définie en $a$ et $b$, on peut lui attribuer des valeurs $f(a)$, $f(b) \in \mathbb{R}$ arbitraires), et on a*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) = \lim_{x \to b-0} F(x) - \lim_{x \to a+0} F(x).}$$

*Démonstration.* Il suffit en effet de prolonger $F$ par continuité sur $[a,b]$ en posant $F(a) = \lim_{x \to a+0} F(x)$ et $F(b) = \lim_{x \to b-0} F(x)$, puis d'appliquer le théorème 6.5 à sa dérivée $F'$ qui est définie sur $]a,b[ = [a,b] \smallsetminus E$ avec $E = \{a,b\}$. □

Un exemple typique d'application du corollaire 6.6 est celui de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{sur l'intervalle } ]-1,1[.$$

Dans ce cas, on a en effet une primitive $F(x) = \operatorname{Arc}\sin(x)$ qui se prolonge en une fonction continue sur $[-1,1]$. On obtient par conséquent

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arc}\sin(1) - \operatorname{Arc}\sin(-1) = \pi.$$

Plus généralement, le corollaire 6.6 nous amène à la définition des «intégrales impropres».

**(6.7) Intégrales «impropres».** *Soit $I = [a,b[ \subset \mathbb{R}$ un intervalle semi-ouvert, où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et soit $f : [a,b[ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable (par exemple continue ou monotone par morceaux) sur tout intervalle $[a,\beta] \subset [a,b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente au point $b$ si la limite*

$$A = \lim_{\beta \to b_-} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

*existe dans* $\mathbb{R}$ *(en particulier finie), et on pose alors* $\int_a^b f(x)\,dx = A$.

*On donne une définition analogue dans le cas d'un intervalle semi-ouvert* $]a,b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, *en considérant la limite* $\lim_{\alpha \to a_+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$ *avec* $[\alpha, b] \subset ]a,b]$, *et on dit qu'on a convergence sur un intervalle ouvert* $]a,b[$ *si les intégrales sur* $]a,c]$ *et* $[c,b[$ *convergent pour tout point intermédiaire* $c \in ]a,b[$.

On vérifiera ainsi par exemple que les intégrales

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{1-a}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^b}\,dx = \frac{1}{b-1}$$

convergent respectivement pour $a < 1$ et $b > 1$, et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx}\,dx = \frac{1}{c}$$

converge pour tout $c > 0$.

## Références


**[1]** Robert G. Bartle. *A Modern Theory of Integration,* Graduate Studies in Mathematics (American Mathematical Society, Providence, RI), vol. 32 (2001) [suitable for advandced undergraduates].

**[2]** Robert G. Bartle. *Return to the Riemann integral,* American Mathematical Monthly **103** (1996) 625-632 [brief and easy to read].

**[3]** Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis,* Third Edition, John Wiley & Sons (2000) [suitable for advanced undergraduates].

**[4]** Arnaud Denjoy. *Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue,* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **154** (1912) 859–862.

**[5]** John DePree and Charles Swartz. *Introduction to Real Analysis,* John Wiley & Sons, New York (1988) [advanced undergraduate students, very readable].

**[6]** Russell Gordon. *Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock,* Amer. Math. Soc. (1994) [comprehensive introduction to the subject].

**[7]** Russell Gordon. *Historical overview of Riemann and Henstock integrals,* Real Analysis Exchange **22** (1) (1996/7) 23–33.

**[8]** Russell Gordon. *The use of tagged partitions in elementary real analysis,* Amer. Math. Monthly **105** (1998) 107-117.

**[9]** Ralph Henstock. *The efficiency of convergence factors for functions of a continuous real variable,* J. London Math. Soc., **30** (1955) 273–286.

**[10]** Jaroslaw Kurzweil. *Generalized ordinary differential equations and continuous dependance on a parameter,* Czech. Math. J. **7** (1957) 418–446.

**[11]** Jaroslav Kurzweil. *Henstock-Kurzweil integration: its relation to topological vector spaces,* World Scientific Publ. Co. (2000) [for advanced specialists in integration theory].

**[12]** Jean Mawhin. *Analyse. Fondements, Techniques, Évolutions,* De Broeck Université, Bruxelles, deuxième édition, 1997 (première édition 1992).

**[13]** Robert M. McLeod. *The Generalized Riemann Integral,* Carus Monograph (Mathematical Association of America, Washington, DC), vol. 20 (1980) [niveau introductif].

**[14]** Pat Muldowney. *A general theory of integration in function spaces, including Wiener and Feynman integration,* Pitman Research Notes in Math. Series, John Wiley & Sons, New York (1987).

**[15]** Oskar Perron. *Über den integralbegriff,* Sitzber. Heidelberg Akad. Wiss., Math.-Naturw. Klasse Abt. A, **16** (1914) 1–16.

**[16]** Eric Schechter. *An Introduction to the gauge integral* (*also known as the generalized Riemann integral, the Henstock integral, the Kurzweil integral, the Henstock-Kurzweil integral, the HK-integral, the Denjoy-Perron integral, etc.*), (web page) http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/gauge/.

**[17]** Charles Swartz. *Introduction to Gauge Integrals,* World Scientific Publ. Co., (2001) [suitable for advanced undergraduates].

**[18]** Lee Peng-Yee. *Lanzhou Lectures on Henstock Integration,* World Scientific Publ. Co., Series in Real Analysis **2** (1989) [exposition of research-level material].

**[19]** Lee Peng Yee and Rudolf Výborný. *The Integral. An Easy Approach after Kurzweil and Henstock,* Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom (2000) [a combined textbook/research monograph, suitable for advanced undergraduates].