

# Le calcul à l'école primaire

par Laurent Lafforgue (avec le concours  
d'instituteurs praticiens et de professeurs de différentes disciplines<sup>1</sup>)

## 1) Objectifs et limites de l'apprentissage du calcul à l'école primaire

L'objectif est de faire acquérir aux élèves la connaissance des nombres entiers naturels (0,1,2,3...), de leur écriture décimale et de leurs relations élémentaires (ordre et quatre opérations), à la fois abstraitement et dans leurs usages concrets liés au comptage et à la mesure : longueurs, surfaces, volumes, masses, temps, angles. A l'issue du cursus primaire, les élèves doivent posséder une maîtrise aisée, exacte et sûre des opérations élémentaires sur les nombres et les grandeurs et de la manipulation des unités ; ils doivent aussi savoir rédiger de façon concise et rigoureuse la solution de problèmes de calcul formulés dans la langue courante, tirés de la vie pratique, des sciences de la nature ou de la mécanique, et nécessitant un raisonnement de nature discursive.

Ces connaissances – dont la plupart sont très utiles – ont une grande valeur mathématique ainsi qu'une puissance formatrice considérable.

Elles permettent de construire une relation d'intimité avec les nombres, selon l'expression de René Thom, et entraînent à leur usage concret. Non seulement elles contribuent à structurer l'esprit tout au long de son développement mais elles constituent la base indispensable d'un apprentissage plus poussé des mathématiques et des sciences de la nature, au collège et bien au-delà. Il existe en mathématiques bien des sortes de nombres, d'additions et de multiplications, et en physique bien des sortes de mesures. Toutes prennent racine et se développent sur ce terreau qu'est la connaissance des nombres entiers naturels et de leurs opérations élémentaires, connaissance qui doit devenir une seconde nature.

A l'école primaire la discipline du calcul repose sur l'usage des quatre opérations sur les nombres entiers. Elle s'étend à la connaissance et au calcul des nombres décimaux et des fractions, en se limitant aux nombres positifs qui seuls peuvent représenter des mesures effectives de longueurs, de masses, etc. Le calcul approché est plus subtil que le calcul exact dont il demande la maîtrise préalable : le calcul des intervalles d'erreurs ne saurait apparaître à l'école primaire mais on y enseigne –

---

<sup>1</sup> Je tiens à remercier les membres du GRIP qui m'ont fait part de leurs remarques et suggestions au cours du processus de rédaction de ce texte. J'exprime ma profonde reconnaissance envers Madame Catherine Krafft, professeur de physique à l'Université d'Orsay, qui l'a corrigé – comme beaucoup d'autres textes que je lui ai soumis – avec une rigueur et une attention à la forme et au fond sans pareilles. Je suis en outre particulièrement heureux de l'approbation sans réserves de Madame Liliane Lurçat à sa version finale.

notamment pour la résolution des problèmes – l'estimation mentale des ordres de grandeurs par les nombres ronds et la notion de valeur approchée d'un quotient au dixième ou au centième de l'unité choisie.

Le calcul se fait sur des nombres, non sur des inconnues abstraites. Les vérifications portent sur des exemples et des figures, dans des raisonnements suffisants pour emporter la conviction même s'ils ne peuvent être qualifiés de démonstrations formelles. En fin de cursus primaire l'instituteur peut éventuellement aller un peu plus loin dans le sens de l'abstraction, pour ceux des élèves qu'il reconnaîtrait comme assez mûrs et déjà assurés dans leurs connaissances.

## 2) Principes généraux pour l'apprentissage du calcul à l'école primaire<sup>2</sup>

L'intimité avec les nombres se construit :

– par l'acquisition d'automatismes (au premier rang desquels figure la connaissance parfaite des tables d'addition et de multiplication, ainsi que la pratique des algorithmes de calcul écrit et de calcul mental des quatre opérations),

– par la diversification des situations (en particulier, la manipulation des nombres et les opérations sur eux, à la fois dans différents contextes concrets où interviennent des grandeurs physiques, et abstraitement),

– par la multiplicité des exemples d'application (comme la connaissance d'un bon nombre de formules de surfaces et de volumes), dont on montre à la fois ce qu'ils ont en commun et ce par quoi ils diffèrent,

– par la diversification des approches (par exemple, le calcul mental et le calcul posé comme deux modes du calcul),

– et par la constitution d'un réseau de liens (par exemple, la correspondance entre l'écriture décimale et les systèmes de multiples et de sous-multiples des unités de mesures usuelles, ou bien l'équivalence entre les deux écritures d'un nombre décimal, celle avec virgule et celle comme fraction avec une puissance de 10 pour dénominateur).

Le maître mot de l'apprentissage du calcul – comme de tout apprentissage – est la progressivité : on chemine du plus simple vers le plus élaboré, en particulier des petits nombres vers des plus grands, et des figures géométriques les plus élémentaires vers d'autres plus complexes, sans brûler aucune étape. Les notions nouvelles doivent être introduites l'une après l'autre, en s'appuyant sur les connaissances déjà acquises ainsi que sur l'intuition. De même, les liens nouveaux entre des notions déjà connues doivent être mis en évidence un par un. Autrement dit, les élèves doivent toujours savoir

---

<sup>2</sup> La mise en oeuvre efficace de ces principes demande une grande régularité dans les leçons et du temps : il faut rétablir les horaires de mathématiques – comme ceux de français et des autres disciplines à enseigner sérieusement – qui ont prévalu dans les écoles primaires jusqu'en 1969. Les activités (sorties à répétitions, « animations pédagogiques » diverses, visites d'intervenants extérieurs, stages et réunions à répétitions imposés aux instituteurs) qui mangent les horaires de ces disciplines doivent être proscrites. Le principe du découpage de l'année scolaire par quatre périodes de vacances de deux semaines est sans doute à remettre en cause.

D'autre part la formation des futurs instituteurs demande une refonte totale. Les prétendues « sciences de l'éducation » qui dominent les IUFM ne permettent pas de donner aux futurs instituteurs des connaissances mathématiques (et autres) suffisantes ni ne les forment à enseigner de manière rigoureuse, structurée et progressive.

exactement de quoi l'instituteur est en train de parler. Toute introduction d'une notion nouvelle ou d'un lien nouveau est l'occasion de faire des rappels ; il ne faut pas manquer de procéder à tous ceux qui s'imposent naturellement dans le contexte considéré.

Toute notion ou toute pratique nouvelle est désignée par un ou plusieurs termes mathématiques précis (par exemple pour la multiplication, les notions de multiplicande, de multiplicateur et de produit, ou pour la division, celles de dividende, de diviseur, de quotient et de reste) qu'on introduit aussitôt ; les élèves doivent les apprendre.

Le développement des mathématiques est en partie fondé sur le besoin de systématisation de l'esprit humain : un ensemble de connaissances qui pousse jusqu'au bout sa logique sous-jacente est plus satisfaisant pour l'esprit et plus aisé à comprendre et à assimiler. Respecter ce principe dans une discipline telle que le calcul élémentaire facilite l'apprentissage et renforce l'exigence logique des enfants. C'est pourquoi les élèves doivent connaître en fin de cursus primaire les algorithmes généraux des quatre opérations sur les nombres, sans limitation sur le nombre de chiffres. C'est aussi pourquoi on enseigne les fractions, qui permettent de diviser un nombre quelconque par un autre.

Chaque fois que l'esprit peut en retirer une plus grande complétude, on met en évidence des couples de notions : par exemple, l'addition et la soustraction vues comme deux opérations inverses, de même que la multiplication et la division.

### **3) Numération, comparaison des nombres et apprentissage des quatre opérations**

L'apprentissage de la numération et celui des quatre opérations sont simultanés : ils commencent dès la fin de l'école maternelle ou le début du CP, en se limitant d'abord aux nombres très petits.

Le cheminement vers des nombres de plus en plus grands doit s'effectuer très progressivement. Les étapes les plus importantes qui le ponctuent sont l'introduction des dizaines et de la première écriture décimale, puis des centaines, puis le développement de cette écriture avec les classes des milliers, des millions, etc.

Dès le début de l'apprentissage, la numération et les opérations doivent porter sur plusieurs types d'objets familiers aux enfants, en répétant inlassablement que l'on ne peut additionner ou soustraire que des objets de même nature. Le lien avec les nombres abstraits se fait en multipliant des exemples concrets formellement identiques.

L'addition est d'abord introduite comme un ajout (qui augmente le nombre), la soustraction comme un retrait (qui le fait diminuer), la multiplication comme un ajout répété de paquets identiques et la division comme un partage en paquets égaux.

### **4) Calcul mental et calcul posé**

Le calcul mental et le calcul posé doivent être introduits et pratiqués très tôt, en commençant sur des petits nombres. Dans la mesure où cela ne nuit pas à la bonne habitude de préférer le calcul mental au calcul écrit chaque fois que cela est possible, il paraît bon d'accoutumer les élèves à poser les quatre opérations même lorsqu'ils ne connaissent encore que des nombres à un seul chiffre.

Dès le cours élémentaire, le développement du calcul mental et du calcul posé exige de connaître par coeur les tables d'addition et de multiplication complètes, jusqu'au point où elles fonctionnent aussi bien comme des tables de soustraction et de division, y compris quand la division ne tombe pas juste. Il exige aussi des exercices nombreux et réguliers qui consolident et entretiennent les automatismes. S'agissant d'opérations faisant intervenir au moins un nombre à deux chiffres, il est bon de vérifier un certain nombre de fois que le calcul mental et le calcul posé (qui ne procèdent pas de la même façon) aboutissent aux mêmes résultats.

La maîtrise des algorithmes des quatre opérations posées est un objectif essentiel.

Le plus riche est celui de la division. (Lequel ? demandera-t-on, car il y en a plusieurs. Il est raisonnable de conserver celui qui a été enseigné si longtemps et si utilement dans les écoles primaires.) Le mettre en oeuvre avec succès suppose la connaissance parfaite des tables et la maîtrise des autres opérations, du calcul mental et d'une forme de calcul approché (pour deviner chaque nouveau chiffre du quotient). Quand une classe a assimilé l'algorithme général de la division, il suffit de donner plusieurs fois par semaine en exercice une ou deux divisions posées pour maintenir la pratique des quatre opérations à un bon niveau.

Il faut connaître les divisions avec reste et celles avec développement décimal après la virgule.

On demande souvent de « faire la preuve d'une division » en multipliant le diviseur par le quotient puis en ajoutant le reste. C'est une vérification pratique du sens de la division comme de l'exactitude de l'algorithme : il est bon que les élèves vérifient autant que possible la cohérence des résultats qu'ils obtiennent et des méthodes qu'ils emploient.

On habitue les élèves à vérifier que l'ordre de grandeur du résultat d'une multiplication ou d'une division est correct (par calcul mental sur des nombres ronds – c'est-à-dire à un seul chiffre suivi de zéros – qui approchent ceux donnés au départ).

On enseigne aussi la « preuve par 9 » comme autre moyen de vérification partielle du résultat d'une opération.

## **5) Calcul et mesures**

On enseigne la mesure des longueurs et celle des masses en même temps qu'on introduit les unités physiques, leurs multiples et sous-multiples. Le principe de systématisation impose d'enseigner aussi les multiples et sous-multiples (comme le décimètre) qui n'appartiennent plus au langage courant.

L'apprentissage des multiples de ces unités est l'occasion d'introduire ou de consolider la connaissance de l'écriture décimale, et celle de leurs sous-multiples de la compléter par l'introduction des chiffres après la virgule. On étend aux nombres décimaux avec virgule la pratique des quatre opérations et de la comparaison entre les nombres.

A partir de mesures concrètes et en se limitant à tel ou tel sous-multiple ou, ce qui revient au même, à tel chiffre après la virgule, on introduit la notion de valeur approchée.

On enseigne et on vérifie concrètement avec les élèves que les longueurs et les masses s'additionnent. On insiste sur le fait que, en revanche, on ne peut pas additionner des grandeurs de natures différentes et que l'on ne peut effectuer l'opération numérique que si ces grandeurs sont exprimées dans la même unité.

On introduit aussi le système plus complexe des unités de temps (seconde, minute, heure, jour, mois, année) et on entraîne les élèves à additionner ou soustraire des intervalles de temps, et à multiplier ou diviser une durée par un nombre.

## 6) Calcul et géométrie

On dit que la surface d'une figure plane est égale au nombre de carrés, dont le côté mesure une unité, nécessaires pour la recouvrir en s'autorisant des découpages. On vérifie avec les élèves que la surface d'un rectangle dont les mesures des côtés sont des nombres entiers est le produit de sa longueur et de sa largeur. En procédant à des découpages dans des cas particuliers, on vérifie les formules de calcul de la surface des triangles, parallélogrammes, losanges et trapèzes. On explique que la règle des découpages signifie que les surfaces s'additionnent.

On explique la formule permettant de calculer la surface du disque, et on présente une valeur approchée du nombre  $\pi$ . On enseigne la mesure des angles (en degrés) et le calcul par des formules de la circonférence d'un cercle et de la longueur d'un arc de cercle. On fait comparer les résultats obtenus par le calcul avec les mesures effectuées sur des figures (au moyen d'une ficelle). On fait vérifier que les mesures d'angles et d'arcs de cercle s'additionnent. On définit le périmètre des autres figures planes étudiées et on explique comment le calculer.

On insiste sur la règle générale qu'une formule de calcul d'une surface fait toujours intervenir le produit de deux longueurs. On explique que multiplier toutes les longueurs par un même nombre a pour effet de multiplier les surfaces par le carré de ce nombre. C'est l'occasion d'introduire la notion de carré d'un nombre.

On enseigne les unités de surface déduites des unités de longueur.

On dit que le volume d'une figure spatiale est égal au nombre de cubes, dont le côté mesure une unité, nécessaires pour le remplir en s'autorisant des découpages. On vérifie avec les élèves que le volume d'un parallélépipède droit est le produit de ses trois longueurs suivant les trois dimensions de l'espace. On enseigne les formules de calcul du volume des parallélépipèdes rectangles, pyramides, cylindres, cônes et sphères.

On explique les formules permettant de calculer le volume intérieur et la surface d'une sphère. On définit la surface totale des autres figures spatiales étudiées, et on explique comment la calculer.

On explique que les volumes s'additionnent et on insiste sur la règle générale qu'une formule permettant le calcul d'un volume fait toujours intervenir le produit de trois longueurs ou, ce qui est équivalent, le produit d'une surface et d'une longueur. On explique que multiplier toutes les longueurs par un même nombre a pour effet de multiplier les volumes par le cube de ce nombre. C'est l'occasion d'enseigner les puissances cubiques d'un nombre.

On enseigne les unités de volume déduites des unités de longueur.

On définit le litre comme le volume d'un cube dont le côté mesure un décimètre. Le volume équivaut alors à la contenance : il s'évalue en mesurant la quantité de liquide nécessaire pour le remplir – s'il s'agit d'un objet creux –, ou celle qu'il déplace – s'il s'agit d'un objet plein que l'on plonge dans un récipient.

On enseigne que le kilogramme est la masse d'un litre d'eau.

Il faut exiger des élèves que, lorsqu'ils parlent de grandeurs physiques, ils n'oublient jamais de préciser les unités de mesure.

## 7) Quels objets et instruments dans la classe ?

Dans la société actuelle, la plupart des élèves passent chaque jour des heures devant divers écrans qui sollicitent violemment et exclusivement la vue et l'ouïe ; les mains restent inactives ou n'agissent que par l'intermédiaire d'une console ou d'un clavier. Cela rend difficile pour les enfants d'acquiescer le sens du réel et tend à les enfermer dans un monde virtuel et simpliste.

L'école doit corriger ces influences. C'est pourquoi ni l'ordinateur – dont les écoliers ne peuvent à leur âge apprendre la programmation –, ni les autres écrans n'ont leur place à l'école primaire.

Les calculatrices sont à exclure comme instruments d'apprentissage du calcul. L'expérience montre que, lorsque les élèves sont autorisés à en apporter en classe, la plupart d'entre eux abusent de leur usage trop facile et presque magique, ce qui hypothèque gravement leur apprentissage du calcul, voire celui des tables d'addition et de multiplication. Il vaut donc mieux proscrire la calculatrice avant l'âge où les élèves apprenaient auparavant à se servir d'une règle à calcul.

Au contraire, on doit saisir toutes les occasions pour que les enfants manipulent des objets concrets et familiers en liaison étroite avec l'apprentissage des nombres et de leurs opérations.

Pour l'apprentissage de la numération et des opérations sur les petits nombres, il faut que les enfants comptent et regroupent ou séparent en petits paquets des objets qu'ils manipulent avec les mains. Le boulier est un outil pédagogique très efficace et il s'utilise même avec des grands nombres ; il est souhaitable que les enfants apprennent à s'en servir.

Il est impératif que l'apprentissage des mesures, de leurs propriétés et de leurs relations mutuelles s'accompagne toujours de nombreuses manipulations concrètes sur des objets. On veillera à ce que les élèves aient à disposition doubles ou triples décimètres, mètres souples et rigides, décamètres d'arpentage, balances et boîtes de masses marquées, figures planes en bois ou en plastique, équerres, compas, rapporteurs, papier quadrillé et ciseaux pour dessiner et découper les figures dont on cherche à calculer la surface, corps solides de toutes les formes étudiées permettant – par immersion dans l'eau – de vérifier les formules de calcul des volumes, corps solides de différentes densités.

## 8) Les nombres et l'économie domestique

Un autre usage concret des nombres et du calcul intéresse directement les enfants et gagnera de l'importance avec l'âge : c'est la comptabilité des prix et de l'argent.

Calculer le prix de paniers de produits divers est l'occasion de faire des additions et des multiplications dès lors qu'on raisonne sur des quantités.

Le système des pièces, avec lequel les enfants sont très tôt familiers, permet d'introduire dès le cours élémentaire le système décimal jusqu'à deux chiffres après la virgule.

Les notions de prix d'achat, de frais, de prix de revient, de prix de vente, de remise, de bénéfice, de taxe et, plus tard, d'intérêt simple donnent l'occasion non seulement d'additionner et de soustraire des nombres mais aussi d'introduire la notion de pourcentage. On explique la signification littérale de l'expression « pour cent » en indiquant qu'elle désigne cent unités, faisant apparaître le pourcentage comme un premier type de fraction avec 100 au dénominateur.

On entraîne les élèves à passer d'un taux exprimé en pourcentage à une somme monétaire comme partie d'une somme totale, et inversement. C'est une première famille d'exemples de proportionnalité.

## 9) Proportionnalité

La règle de trois doit être sue par coeur. Son application, qui ne se résume pas à un pur automatisme, est un raisonnement déjà complexe qui suppose de comprendre le fonctionnement et la signification de la notion de proportionnalité. Il faut entraîner à l'employer dans des situations concrètes variées, dont voici des exemples importants :

- ceux de la vie courante (calcul des matériaux nécessaires pour des travaux, des ingrédients d'une recette de cuisine, etc.),
- les conversions de mesures résultant d'un changement d'unité,
- les changements d'échelle pour la représentation des distances sur une carte géographique ou routière,
- la proportionnalité de la masse avec le volume pour un corps de composition donnée (avec les notions de masse volumique et de densité),
- à vitesse constante, la proportionnalité de la distance parcourue avec le temps de parcours,
- à débit constant d'une rivière ou d'un robinet, la proportionnalité du volume déversé avec le temps,
- le partage en parts égales de divers types d'objets.

## 10) Arithmétique

Le partage en parts égales et les différents exemples de proportionnalité rencontrés et examinés sont l'occasion d'introduire les fractions, quotients de deux nombres entiers appelés numérateur et dénominateur.

On montre par divers exemples quelles sont les conditions d'égalité de deux fractions : le résultat d'une fraction ne change pas quand on multiplie ou divise le

numérateur et le dénominateur par un même entier. La notion de divisibilité d'un entier par un autre en découle naturellement, puis celle de « PGCD » qui permet de réduire une fraction à sa forme la plus simple.

On introduit la notion de nombre premier et entraîne les élèves à reconnaître si un petit nombre est premier ou pas.

On enseigne comment multiplier et diviser les fractions, puis comment les additionner et les soustraire, par réduction au même dénominateur. On introduit de cette façon la notion de multiple puis, au nom d'un souci d'économie, celle de « PPCM ».

On donne de nombreux exercices pour mettre en oeuvre ces pratiques et comprendre de manière approfondie ces notions. Pour tout ce qui touche aux fractions à l'école primaire, il est préférable de se cantonner à des petits nombres – même s'il doit être clair qu'il n'y a pas de limite à la taille du numérateur et du dénominateur d'une fraction.

On exerce les élèves à développer une fraction en un nombre décimal, en leur montrant la périodicité du développement obtenu, expliquée par la répétition d'une même situation dans le processus de division.

## **11) La rédaction comme partie essentielle de la résolution des problèmes**

Dès le début de l'apprentissage du calcul, il faut veiller à obtenir des élèves le plus grand soin dans l'écriture quand ils posent une opération sur le papier.

De même, dès que l'on peut formuler une question de calcul dans une phrase simple qui parle de situations et d'objets concrets, c'est-à-dire très tôt, on doit exiger d'eux qu'ils présentent leur résultat et leur calcul dans une phrase correctement rédigée.

La complexité des questions doit croître très progressivement, jusqu'à requérir des élèves un raisonnement relativement élaboré et structuré et donc la composition de plusieurs phrases enchaînées de présentation et de narration.

Le but de l'enseignement du calcul à l'école primaire est d'apprendre à résoudre des petits problèmes simples, tirés de la vie pratique, des sciences de la nature ou de la mécanique, formulés dans la langue courante, ne comportant qu'une seule question et qui utilisent les mesures de grandeurs physiques connues, les conversions de mesures, les changements d'échelle et la proportionnalité. A l'issue du cursus primaire, l'élève doit être devenu capable de trouver par lui-même les étapes du raisonnement nécessaire à la solution d'un tel problème simple et de les exposer.

Une très grande importance doit être accordée à la rédaction des solutions qui permet la maîtrise complète du problème que l'on traite. Il faut exiger de l'élève qu'il rédige son texte de façon à se comprendre lui-même et comme s'il s'adressait à quelqu'un qui ne connaîtrait pas la solution et à qui il s'agirait de l'expliquer. Les phrases doivent être correctes du point de vue de la langue, et employer le vocabulaire précis de la vie pratique, des mathématiques et de la mécanique élémentaires, des grandeurs physiques, de leurs mesures et de leurs unités. Elles doivent n'oublier aucun argument et s'enchaîner logiquement.

Ce lien entre le calcul, le raisonnement et la langue écrite est décisif, à la fois dans la perspective d'un apprentissage plus avancé des mathématiques et des sciences de la nature, et pour la formation et la structuration générales de l'esprit.